Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, E. Thommes

Universität Heidelberg
Sommersemester 2010

14. Übung zur Quantenmechanik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 15./16.07.2010

Die 2. Klausur zur Quantenmechanik findet am Freitag, 23. Juli 2010, um 14 Uhr s. t. in INF 308 (Hörsaalgebäude Physik), Hörsaal 1 und 2, statt. Es stehen Ihnen dann 120 Minuten zur Bearbeitung der Klausur zur Verfügung. Bitte bringen Sie (unbeschriebenes) Papier und Schreibgerät sowie einen Lichtbildausweis mit. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

P 53 Energie-Zeit-Unschärfe (optional, +4 Punkte)

Auch zwischen Energie und Zeit besteht in der Quantenmechanik eine Unschärferelation, die allerdings einen anderen Ursprung hat als die bisher betrachteten Unschärferelationen, z. B. zwischen Ort und Impuls.
Betrachten Sie ein Quantensystem, das durch einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ beschrieben wird.

(a) Sei $\mathbf{A}$ eine nicht explizit von der Zeit abhängige Observable. Zeigen Sie, daß

$$(\Delta\mathbf{H})(\Delta\mathbf{A})(t) \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{d\left\langle\mathbf{A}\right\rangle(t)}{dt}\right| . \tag{1}$$

Zeigen Sie weiter, daß $\Delta\mathbf{H}$ nicht zeitabhängig ist. Geben Sie $\Delta\mathbf{H}$ für einen Eigenzustand von $\mathbf{H}$ an.

Leiten Sie durch Verwendung der Notation $\Delta E = \Delta\mathbf{H}$ und durch die *Definition* einer typischen Zeitskala

$$\Delta t = \Delta\mathbf{A}\left|\frac{d\langle\mathbf{A}\rangle(t)}{dt}\right|^{-1} \tag{2}$$

eine Energie-Zeit-Unschärferelation ab.

(b) Sei nun der Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle$ eine Überlagerung zweier (nichtentarteter) Eigenzustände von $\mathbf{H}$ mit verschiedenen Eigenwerten E_1 und E_2,

$$|\psi(t_0)\rangle = c_1\,|\phi_1\rangle + c_2\,|\phi_2\rangle\ . \tag{3}$$

Geben Sie den Zustand zur Zeit t an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung einer mit $\mathbf{H}$ vertauschenden Observable $\mathbf{A}$ den zum Eigenvektor $|u_m\rangle$ von $\mathbf{A}$ gehörenden Eigenwert a_m zu finden. Geben Sie die Bohr-Frequenz an, mit der diese Wahrscheinlichkeit oszilliert. Definieren Sie $\Delta E = |E_2 - E_1|$ und erhalten Sie hiermit wieder eine Energie-Zeit-Unschärferelation.

Bemerkungen: Die Überlegungen aus Teil (b) lassen sich verallgemeinern auf den Fall eines kontinuierlichen Spektrums von **H** und einen Anfangszustand, der eine Überlagerung der Form

$$|\psi(t_0)\rangle = \int dE\, g(E)\, |\phi_E\rangle \tag{4}$$

ist, wobei $|g(E)|^2$ nur in einem Bereich der Breite ΔE um ein E_0 wesentlich von Null verschieden ist.

Beachten Sie, daß die Energie-Zeit-Unschärferelation sich deutlich von den anderen Unschärferelationen der Quantenmechanik unterscheidet. Bei letzteren basierte die Unschärfe auf dem Nicht-Kommutieren von Operatoren, die den Observablen zugeordnet sind. Die Zeit t ist in der Quantenmechanik dagegen kein Operator sondern ein Parameter in der Schrödingergleichung.

Typischerweise erfordert die Herleitung der Energie-Zeit-Unschärferelation die *Definition* einer für das System typischen Zeitskala. Durch eine gewisse Freiheit bei dieser Definition erklärt sich, daß die Energie-Zeit-Unschärferelationen, die man in der Literatur findet, sich oft um Faktoren 2 und/oder π unterscheiden.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm10.html